ECOLE POLYTECHNIQUE - ESPCI
ECOLES NORMALES SUPERIEURES

CONCOURS D'ADMISSION 2026

LUNDI 13 AVRIL 2026
08h00 - 12h00

FILIERE PC - Epreuve n° 1

MATHEMATIQUES

Durée : 4 heures

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Le sujet explore certains modèles simplifiés de matériaux ferromagnétiques. L'idée générale est de représenter le matériau comme une collection de petits aimants qui peuvent prendre les valeurs $+1$ ou -1, et dont les interactions sont décrites par une fonction d'énergie. Le système occupe une configuration donnée avec une probabilité proportionnelle à l'exponentielle de cette fonction d'énergie. Certains paramètres du problème peuvent être reliés à la température par exemple, et on étudie les propriétés du système en fonction de ces paramètres.
Le sujet se décompose en trois parties. Même si ce n'est pas toujours mentionné, il est bien sûr tout à fait acceptable, pour répondre à une question, d'utiliser les résultats de questions précédentes.
On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. On fixe, pour toutes les parties du sujet, un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sur lequel seront définies les différentes variables aléatoires. On note $P[A]$ la probabilité d'un événement $A \in \mathscr{A}$, et $E[X]$ l'espérance d'une variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$.
Si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et $y = (y_1, \ldots, y_d)$ sont des éléments de $\mathbb{R}^d$, on note

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i$$

leur produit scalaire. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est convexe si pour tout $\alpha \in [0,1]$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}.$$

On rappelle que lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ tend vers l'infini, on a l'équivalence asymptotique

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Première partie

On fixe X une variable aléatoire à valeurs dans un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}^d$. On note $X_1, X_2 \ldots, X_d$ les coordonnées de X. On définit l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \to & \mathbb{R} \\ \lambda & \mapsto & \ln E[e^{\lambda \cdot X}]. \end{cases}$$

Plus explicitement, en notant $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_d)$ les coordonnées de λ, on a donc

$$\phi(\lambda) = \ln E\left[\exp\left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_i X_i\right)\right].$$

1. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, que l'on suppose dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $h > 0$, on a

$$\frac{g(x) - g(x-h)}{h} \leqslant g'(x) \leqslant \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

2. On se donne une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, que l'on suppose convexes et dérivables. On suppose également que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que la fonction f est convexe.

3. Donner un contre-exemple où la fonction f n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$.

4. On suppose que f est dérivable en un point $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'on a alors

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x).$$

5. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et de classe $\mathscr{C}^2$. Montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, la matrice hessienne de g en x est une matrice symétrique positive.
Indication : Étant donné $u \in \mathbb{R}^d$, on pourra considérer la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $g(x+tu)$.

6. Soit $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ et telle qu'en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la matrice hessienne de g en x est symétrique positive. Montrer que la fonction g est convexe.

7. Montrer que l'application ϕ (qui apparaît dans la section de notations) est de classe $\mathscr{C}^2$, et que pour tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{E[X_i e^{\lambda\cdot X}]}{E[e^{\lambda\cdot X}]}, \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \phi}{\partial \lambda_i\, \partial \lambda_j}(\lambda) = \frac{E[X_i X_j e^{\lambda\cdot X}]}{E[e^{\lambda\cdot X}]} - \frac{E[X_i e^{\lambda\cdot X}]}{E[e^{\lambda\cdot X}]}\frac{E[X_j e^{\lambda\cdot X}]}{E[e^{\lambda\cdot X}]}.$$

8. Montrer que la fonction ϕ est convexe.

Deuxième partie

On se donne $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$P[\sigma_i = 1] = P[\sigma_i = -1] = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on note $X^{(N)} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N)$; il s'agit d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ dont la première coordonnée est σ_1, la deuxième coordonnée est σ_2, et ainsi de suite.
Pour tous $\beta, h \in \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, on définit

$$H_N(\beta, h, a) = \beta \left(\sum_{i=1}^{N-1} a_i a_{i+1} \right) + \beta a_N a_1 + h \sum_{i=1}^{N} a_i,$$

ainsi que

$$Z_N(\beta, h) = E\left[\exp\left(H_N(\beta, h, X^{(N)})\right)\right], \quad \text{et} \quad F_N(\beta, h) = \frac{1}{N} \ln Z_N(\beta, h).$$

9. Pour tous $h \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que $Z_{N+1}(0,h) = \mathrm{ch}(h) Z_N(0,h)$, puis calculer $F_N(0,h)$.

10. Montrer que la fonction $F_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est convexe.

Pour les quatre questions suivantes, on fixe $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$.

11. On pose

$$A = \begin{pmatrix} e^{\beta-h} & e^{-\beta+h} \\ e^{-\beta-h} & e^{\beta+h} \end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A admet deux valeurs propres réelles distinctes, et que la plus grande valeur propre, que l'on note $\lambda(\beta,h)$, est donnée par la formule

$$\lambda(\beta,h) = e^{\beta}\,\mathrm{ch}(h) + \sqrt{e^{2\beta}\,\mathrm{ch}^2(h) - 2\,\mathrm{sh}(2\beta)}.$$

12. Pour tous $s,t \in \mathbb{R}$, on note $B_{s,t} = \exp(\beta st + hs)$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, on a

$$\exp(H_N(\beta,h,a)) = \left(\prod_{i=1}^{N-1} B_{a_i,a_{i+1}}\right) B_{a_N,a_1}.$$

13. En déduire que

$$Z_N(\beta,h) = 2^{-N}\,\mathrm{tr}(A^N).$$

14. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} F_N(\beta,h) = \ln\big(\lambda(\beta,h)\big) - \ln(2).$$

15. Montrer que la fonction $\lambda : [0,+\infty[\, \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

16. Pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit

$$m_N(\beta,h) = \frac{1}{Z_N(\beta,h)} E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)\exp(H_N(\beta,h,X^{(N)}))\right].$$

Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} m_N(\beta,h) = \frac{\partial}{\partial h}\ln\big(\lambda(\beta,h)\big).$$

(Le terme de droite désigne la dérivée de la fonction $h \mapsto \ln(\lambda(\beta,h))$, calculée en h. Pour répondre à cette question, on pourra penser à utiliser les résultats de questions précédentes, y compris de la première partie.)

17. Pour tout $\beta \geqslant 0$, on définit la fonction

$$g_\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & \ln\big(\lambda(\beta,h)\big) - \beta. \end{array} \right.$$

Montrer que la suite de fonctions $(g_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $h \mapsto |h|$.

18. Identifier la limite simple de la suite $(g'_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}}$. La convergence est-elle uniforme ?

Troisième partie

Comme dans la deuxième partie, on se donne $(\sigma_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et telles que, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$P[\sigma_i = 1] = P[\sigma_i = -1] = \frac{1}{2}.$$

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la variable aléatoire

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i,$$

ainsi que l'ensemble

$$\mathscr{M}_N = \left\{-1, -1+\frac{2}{N}, -1+\frac{4}{N}, \dots, 1-\frac{2}{N}, 1\right\}.$$

Pour tous $N \in \mathbb{N}^*$, $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$, on définit

$$Y_N(\beta,h) = E\left[\exp\left(\beta N S_N^2 + hNS_N\right)\right], \quad \text{et} \quad G_N(\beta,h) = \frac{1}{N}\ln Y_N(\beta,h).$$

Enfin, on définit la fonction $I :]-1,1[\to \mathbb{R}$ par

$$I(x) = \frac{1+x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{2}\right) + \frac{1-x}{2}\ln\left(\frac{1-x}{2}\right).$$

19. Montrer que la fonction I peut se prolonger par continuité en -1 et en 1.

20. Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, calculer la probabilité de l'événement $\{S_N = x\}$.

21. Soit $(u_N)_{N\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a $u_N \in \mathscr{M}_N$, et telle que $\lim_{N\to\infty} u_N = x \in]-1,1[$. Montrer que

$$\lim_{N\to+\infty} -\frac{1}{N}\ln P[S_N = u_N] = I(x).$$

22. Montrer que pour tous $\beta \geqslant 0$, $h \in \mathbb{R}$, et $x \in \mathscr{M}_N$, on a

$$G_N(\beta,h) \geqslant \beta x^2 + hx + \frac{1}{N}\ln P[S_N = x].$$

On admet que pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$, la quantité $G_N(\beta,h)$ converge, quand N tend vers l'infini, vers

$$g(\beta,h) = \sup_{x\in[-1,1]}\left(\beta x^2 + hx - I(x)\right).$$

Pour les trois questions suivantes, on note, pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$,

$$\psi_{\beta,h} : \left\{\begin{array}{rcl} [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \beta x^2 + hx - I(x). \end{array}\right.$$

23. Pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h \in \mathbb{R}$, déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\psi''_{\beta,h}(x) \leqslant 0$. (On pourra distinguer le cas $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ du cas $\beta > \frac{1}{2}$).

24. Pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h > 0$, montrer que la fonction $\psi_{\beta,h}$ atteint son maximum en un unique point $x_*(\beta, h)$, et que $x_*(\beta, h) \in]0, 1[$. Qu'en est-il pour $h < 0$?

25. Pour $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, montrer que la fonction $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum en zéro et uniquement en ce point ; on pose $x_*(\beta, 0) = 0$ dans ce cas. Pour $\beta > \frac{1}{2}$, montrer qu'il existe $x_*(\beta, 0) \in]0, 1[$ tel que $\psi_{\beta,0}$ atteint son maximum exactement en les points $x_*(\beta, 0)$ et $-x_*(\beta, 0)$.

26. On fixe $\beta \geqslant 0$ et $h > 0$, et on se donne une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} v_n = h$. On suppose de plus que la limite

$$\lim_{n\to\infty} x_*(\beta, v_n)$$

existe. Montrer que cette limite est $x_*(\beta, h)$.

À partir de maintenant, on admet que pour tout $\beta \geqslant 0$, l'application

$$\begin{cases} [0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ h & \mapsto & x_*(\beta, h) \end{cases}$$

est continue.

27. Montrer que pour tous $\beta \geqslant 0$, et $h, h' \geqslant 0$, on a

$$(h' - h)x_*(\beta, h) \leqslant g(\beta, h') - g(\beta, h) \leqslant (h' - h)x_*(\beta, h').$$

28. En déduire que pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h > 0$, la fonction $h' \mapsto g(\beta, h')$ est dérivable en h, et que

$$\frac{\partial g}{\partial h}(\beta, h) = x_*(\beta, h).$$

29. Déterminer quelles sont les valeurs de $\beta \geqslant 0$ pour lesquelles la fonction $h \mapsto g(\beta, h)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

30. Pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h > 0$, identifier la limite quand N tend vers l'infini de

$$\frac{1}{Y_N(\beta, h)} E\left[\left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)\exp\left(\frac{\beta}{N}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\sigma_i\sigma_j + h\sum_{i=1}^{N}\sigma_i\right)\right].$$

(On pourra penser à utiliser les résultats de questions précédentes, y compris de la première partie.)

31. Pour tous $\beta \geqslant 0$ et $h > 0$, montrer que $x_*(\beta, h)$ satisfait l'équation

$$x_*(\beta, h) = \operatorname{th}(h + 2\beta x_*(\beta, h)).$$

32. Montrer que

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h>0}} \frac{x_*\left(\frac{1}{2}, h\right)}{(3h)^{1/3}} = 1.$$

La quantité $x_*(\beta, h)$ peut-être interprétée comme la magnétisation d'un matériau à température $\frac{1}{\beta}$ soumis à un champ magnétique h. En particulier, le changement de comportement en $\beta = \frac{1}{2}$ met en évidence une transition de phase : une magnétisation spontanée apparaît à basse température, mais disparaît soudainement quand la température dépasse un certain seuil.